Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
2. Klausur

Dienstag, 2. November 2021 (Vormittag)

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antworthefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

14 Seiten

8821 – 7127

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, sollten von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 7]

In Lucys Musikakademie haben acht Schüler und Schülerinnen ihre Klavier-Abschlussprüfung abgelegt und dabei jeweils eine Punktzahl aus 150 Gesamtpunkten erreicht. Lucy hatte beschlossen, in den Wochen vor der Prüfung die durchschnittliche Anzahl der Übungsstunden pro Woche für alle ihre Klavierschüler und -schülerinnen aufzuschreiben. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Durchschnittliche wöchentliche Übungszeit (h)	28	13	45	33	17	29	39	36
Abschlussnote (D)	115	82	120	116	79	101	110	121

(a) Finden Sie den Pearsonschen Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten r für diese Daten. [2]

(b) Der Zusammenhang zwischen den Variablen kann durch die Regressionsgleichung $D = ah + b$ modelliert werden. Notieren Sie die Werte von a und b. [1]

(c) Eine Klavierschülerin von diesen acht Schülern und Schülerinnen war von ihrem Ergebnis enttäuscht und wünschte sich, sie hätte mehr geübt. Bestimmen Sie auf der Grundlage der gegebenen Daten, wie sich ihr Ergebnis voraussichtlich verändert hätte, wenn sie zusätzlich fünf Stunden pro Woche geübt hätte. [2]

(d) Lucy behauptet, dass die Anzahl der Übungsstunden eines Schülers oder einer Schülerin einen direkten Einfluss auf seine bzw. ihre Abschlussnote habe. Kommentieren Sie die Gültigkeit von Lucys Behauptung. [1]

Lucy vermutete, dass die Schüler und Schülerinnen nicht so viel geübt hatten, wie sie vorgaben. Um dies zu kompensieren, zog Lucy eine bestimmte Anzahl von Wochenstunden von den angegebenen Stunden der Schüler und Schülerinnen ab.

(e) Geben Sie an, wie sich dies gegebenenfalls auf den Wert von r auswirken würde. [1]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

2. [Maximale Punktzahl: 5]

Betrachten Sie ein Dreieck ABC, mit $\mathrm{AC} = 12$, $\mathrm{CB} = 7$ und $\mathrm{B\hat{A}C} = 25^{\circ}$.

Finden Sie den kleinstmöglichen Umfang des Dreiecks ABC.

3. [Maximale Punktzahl: 7]

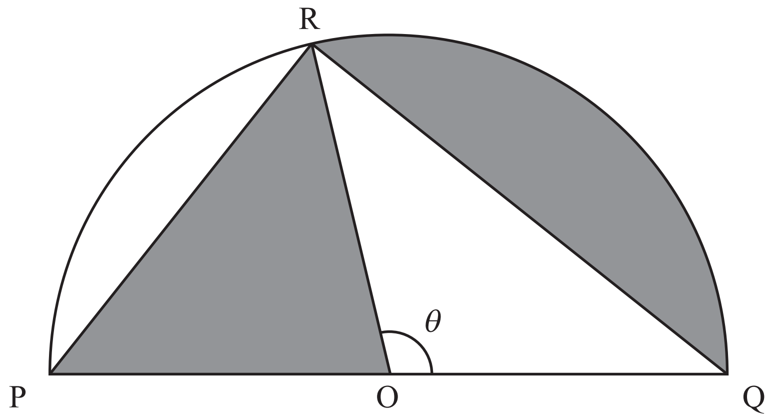
Eine Fabrik stellt Lampen her. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lampe als defekt erkannt wird, beträgt $0{,}05$. Eine Stichprobe von 30 Lampen wird getestet.

(a) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der Stichprobe mindestens eine defekte Lampe befindet. [3]

(b) Angenommen, es gibt mindestens eine defekte Lampe in der Stichprobe. Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es höchstens zwei defekte Lampen gibt. [4]

4. [Maximale Punktzahl: 6]

Das folgende Diagramm zeigt einen Halbkreis mit Mittelpunkt O und Radius r. Die Punkte P, Q und R liegen auf der Kreislinie, so dass $\mathrm{PQ} = 2r$ und $\mathrm{R\hat{O}Q} = \theta$, mit $0 < \theta < \pi$.



(a) Die beiden schattierten Flächen haben denselben Flächeninhalt. Zeigen Sie, dass dann gilt: $\theta = 2\sin\theta$. [5]

(b) Bestimmen Sie unter Nutzung der Vorarbeit den Wert von θ. [1]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. [Maximale Punktzahl: 9]

Die Summe der ersten n Terme einer geometrischen Folge ist definiert durch $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{2}{3}\left(\frac{7}{8}\right)^r$.

(a) Finden Sie den ersten Term der Folge, u_1. [2]

(b) Finden Sie S_∞. [3]

(c) Finden Sie den kleinsten Wert von n, so dass $S_\infty - S_n < 0,001$. [4]

6. [Maximale Punktzahl: 8]

(a) Beweisen Sie die Identität $(p+q)^3 - 3pq(p+q) \equiv p^3 + q^3$. [2]

Die Gleichung $2x^2 - 5x + 1 = 0$ hat zwei reelle Lösungen, α und β.

Betrachten Sie die Gleichung $x^2 + mx + n = 0$, mit $m, n \in \mathbb{Z}$. Sie hat die Lösungen $\frac{1}{\alpha^3}$ und $\frac{1}{\beta^3}$.

(b) Bestimmen Sie die Werte von m und n, ohne die Gleichung $2x^2 - 5x + 1 = 0$ zu lösen. [6]

7. [Maximale Punktzahl: 6]

Eine stetige Zufallsvariable X hat eine Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion, die gegeben ist durch:

$$f(x) = \begin{cases} \arccos x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Durchschnittswert dieser Verteilung ist m.

(a) Bestimmen Sie den Wert von m. [2]

(b) Bestimmen Sie den Wert von a unter der Voraussetzung, dass $P(|X - m| \le a) = 0{,}3$ gilt. [4]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

8. [Maximale Punktzahl: 8]

Betrachten Sie die Kurve C, gegeben durch $y = x - xy\ln(xy)$, mit $x > 0$, $y > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\right)\left(1 + \ln(xy)\right) = 1$. [3]

(b) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit die Gleichung der Tangente an C am Punkt mit $x = 1$. [5]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

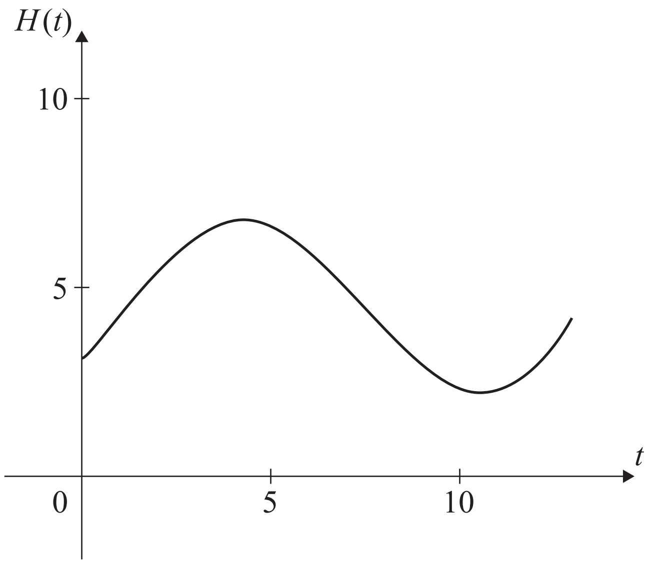
Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

9. [Maximale Punktzahl: 15]

Der Wasserpegel (in Meter) im Hafen von Dungeness lässt sich durch die Funktion $H(t) = a\sin\left(b(t-c)\right) + d$ modellieren. Hierbei ist t die Anzahl der Stunden nach Mitternacht, und a, b, c und d sind Konstanten mit $a > 0$, $b > 0$ und $c > 0$.

Die folgende Grafik zeigt den Wasserpegel über 13 Stunden, beginnend um Mitternacht.



Das erste Hochwasser tritt um 04:30 Uhr auf und das nächste Hochwasser tritt 12 Stunden später auf. Im Laufe des Tages schwankt der Wasserpegel zwischen $2{,}2\,\text{m}$ und $6{,}8\,\text{m}$.

Alle Pegelstände werden auf eine Dezimalstelle genau angegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $b = \dfrac{\pi}{6}$. [1]

(b) Finden Sie den Wert von a. [2]

(c) Finden Sie den Wert von d. [2]

(d) Finden Sie den kleinstmöglichen Wert von c. [3]

(e) Finden Sie den Wasserpegel um 12:00 Uhr. [2]

(f) Bestimmen Sie die Anzahl der Stunden innerhalb eines 24-Stunden-Zeitraums, in denen der Wasserpegel höher ist als 5 Meter. [3]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 9)

Ein Fischer stellt fest, dass der Wasserpegel im nahegelegenen Hafen von Folkestone dem gleichen sinusförmigen Muster folgt wie im Hafen von Dungeness, außer dass das Hochwasser (und Niedrigwasser) 50 Minuten früher auftritt als in Dungeness.

(g) Finden Sie eine geeignete Gleichung zur Modellierung des Wasserpegels im Hafen von Folkestone. [2]

10. [Maximale Punktzahl: 18]

Betrachten Sie die Funktion $f(x)=\dfrac{x^2-x-12}{2x-15}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq \dfrac{15}{2}$.

(a) Finden Sie die Koordinaten der Punkte, in denen der Graph von f

(i) die x-Achse schneidet;

(ii) die y-Achse schneidet. [3]

(b) Notieren Sie die Gleichung der vertikalen Asymptote des Graphen von f. [1]

(c) Die schräge Asymptote des Graphen von f kann folgendermaßen geschrieben werden: $y = ax + b$ mit a, $b \in \mathbb{Q}$.

Finden Sie die Werte von a und b. [4]

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f für $-30 \le x \le 30$. Kennzeichnen Sie dabei deutlich die Schnittpunkte mit den Achsen und den Asymptoten. [3]

(e) (i) Drücken Sie $\dfrac{1}{f(x)}$ in Partialbrüchen aus.

(ii) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit den genauen Wert von $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

Drücken Sie Ihre Antwort als einzelnen Logarithmus aus. [7]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 21]

Drei Punkte $\mathrm{A}(3, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, -2, 0)$ und $\mathrm{C}(1, 1, -7)$ liegen in der Ebene Π_1.

(a) (i) Finden Sie den Vektor $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ und den Vektor $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

(ii) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit die Gleichung von Π_1, und drücken Sie Ihre Antwort in der Form $ax + by + cz = d$ aus, mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. [7]

Die Ebene Π_2 hat die Gleichung $3x - y + 2z = 2$.

(b) Die Gerade L ist die Schnittgerade von Π_1 und Π_2. Validieren Sie, dass die Vektorgleichung von L folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$ [2]

(c) Die Ebene Π_3 ist gegeben durch $2x - 2z = 3$. Die Gerade L und die Ebene Π_3 schneiden sich im Punkt P.

(i) Zeigen Sie, dass im Punkt P gilt: $\lambda = \frac{3}{4}$.

(ii) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit die Koordinaten von P. [3]

(d) Der Punkt $\mathrm{B}(0, -2, 0)$ liegt auf L.

(i) Finden Sie den Spiegelpunkt des Punktes B in der Ebene Π_3.

(ii) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit die Vektorgleichung der Gerade, die durch Spiegelung von L an der Ebene Π_3 entsteht. [9]

Quellen:

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.